\_\_\_\_\_

**|\_\_\_ |**

**/ /**

**/ /**

**/\_/**

**\_\_\_\_ \_ \_**

**| \_ \ \_ \_\_ \_\_\_ | |\_\_ | | \_\_\_ \_ \_\_ \_\_\_ \_\_ \_ \_\_\_**

**| |\_) | '\_\_/ \_ \| '\_ \| |/ \_ \ '\_ ` \_ \ / \_` / \_\_|**

**| \_\_/| | | (\_) | |\_) | | \_\_/ | | | | | (\_| \\_\_ \**

**|\_| |\_| \\_\_\_/|\_.\_\_/|\_|\\_\_\_|\_| |\_| |\_|\\_\_,\_|\_\_\_/**

**\_ \_ \_ \_ \_\_**

**\_\_| | \_\_\_ / \ \_\_\_(\_) \_\_ \_ \_ \_\_ \_\_ \_ \_\_\_(\_) /\_/ \_ \_\_**

**/ \_` |/ \_ \ / \_ \ / \_\_| |/ \_` | '\_ \ / \_` |/ \_\_| |/ \_ \| '\_ \**

**| (\_| | \_\_/ / \_\_\_ \\\_\_ \ | (\_| | | | | (\_| | (\_\_| | (\_) | | | |**

**\\_\_,\_|\\_\_\_| /\_/ \\_\\_\_\_/\_|\\_\_, |\_| |\_|\\_\_,\_|\\_\_\_|\_|\\_\_\_/|\_| |\_|**

**|\_\_\_/**

**Contenido**

**=========**

**1. Introducción.**

**2. Descripción del Problema.**

**3. El Método Húngaro.**

**4. El Mecanismo de Asignación.**

**5. Un Primer Ejemplo.**

**6. Un Segundo Ejemplo.**

**7. Múltiples Soluciones Óptimas.**

**8. Problemas con la Solución Final.**

**9. Desbalance**

**10. Maximización.**

**11. El Vendedor Viajero.**

**12. Un Ejemplo de Mayor Profundidad.**

**13. Un Ejemplo No Simétrico.**

**14. Un Ejemplo No Simétrico Inverso.**

**15. Resumen.**

**16. Ejercicios.**

**1. Introducción.**

**================**

**El problema de asignación es caso de programación lineal en el que los recursos se asignan a actividades en términos de uno a uno. Cada recurso debe asignarse de modo único a una actividad particular o asignación, por ejemplo un empleado o empleada se asigna a una tarea, una máquina se asigna a un sitio, o un intervalo de tiempo se asigna a trabajarse en una labor específica, un trabajo se asigna a un procesador. Se tiene un costo asociado c(i,j) o cij de otorgar el recurso a la asignación de modo que el objetivo es determinar en qué forma deben realizarse todas las asignaciones para minimizar los costos totales.**

**Es importante resaltar que si se tienen "n" recursos y "n" asignaciones existen n! posibles formas de realizar la asignación. Una forma de encontrar la asignación óptima consistiría en enumerar todas las rutas, evaluarlas y encontrar la ruta con el valor mínimo. Sin embargo esto método de "fuerza bruta" es poco aconsejable debido a su gran costo computacional.**

**2. Descripción del Problema.**

**============================**

**La compañía "Job Shop" ha comprado tres máquinas nuevas de diferentes tipos. Se tienen tres localizaciones disponibles en el país en las que se podrían instalar las máquinas. Se busca asignar las máquinas a las localizaciones disponibles de modo que se minimice el costo total de instalación. A continuación se muestra el costo estimado de la instalación de las máquinas en las distintas localizaciones.**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | J1 | J2 | J3 | Oferta |**

**| | | | | |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|M1 | 13 | 10 | 12 | 1 |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|M2 | 15 | 11 | 13 | 1 |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|M3 | 5 | 7 | 10 | 1 |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|Demanda| 1 | 1 | 1 | |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**Para resolver el problema se utilizará la siguiente notación:**

**xij: establece si se asigna la máquina "i" hacia la localización "j". Por ejemplo la variable x23 indicará que la máquina 2 se enviará hacia la localización 3.**

**A continuación se indica en la tabla el significado de las variables.**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | J1 | J2 | J3 | Oferta |**

**| | | | | |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|M1 |(x11) 13 |(x12) 10 |(x13) 12 | 1 |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|M2 |(x21) 15 |(x22) 11 |(x23) 13 | 1 |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|M3 |(x31) 5 |(x32) 7 |(x33) 10 | 1 |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**| | | | | |**

**|Demanda| 1 | 1 | 1 | |**

**+-------+---------+---------+---------+--------+**

**De esta forma, el problema de programación lineal se puede plantear como:**

**min z = 13 x11 + 10 x12 + 12 x13**

**+ 15 x21 + 11 x22 + 13 x23**

**+ 5 x31 + 7 x32 + 10 x33**

**Restricciones de oferta:**

**x11 + x12 + x13 = 1**

**x21 + x22 + x23 = 1**

**x31 + x32 + x33 = 1**

**Restricciones de la demanda:**

**x11 + x21 + x31 = 1**

**x12 + x22 + x32 = 1**

**x13 + x23 + x33 = 1**

**xij=0 o xij=1**

**para i:=1,2,3 y j:=1,2,3**

**y**

**El valor de xij se interpretará como:**

**\_**

**| 1 si máquina "i" se asigna lugar "j"**

**xij = |**

**|\_ 0 de otra forma**

**Una condición adicional para todos los problemas de asignación es que los costos de la función objetivo deben ser positivos.**

**cij >= 0**

**Se debe tener en cuenta que el número de máquinas es igual al número de localizaciones. Cada máquina se asigna únicamente a una localización, de igual forma cada localización recibe únicamente una máquina. Cada máquina puede realizar el trabajo que le corresponde independientemente de donde se coloca.**

**Al analizar el planteamiento anterior, es evidente que el problema de asignación es un caso particular del problema de transporte y por lo tanto se pueden usar los algoritmos vistos anteriormente para resolverlo. Sin embargo existen algoritmos específicos que explotan la estructura propia de este problema como los que se presentan a continuación.**

**3. El Método Húngaro.**

**=====================**

**El método húngaro es muy eficiente para resolver problemas de asignación. Está basado en el siguiente principio: si se suma una constante (o se resta) de cada fila (o columna) de la matriz de costos, la asignación resultante tiene la misma solución óptima que el problema original.**

**Algoritmo:**

**----------**

**(1) Identifique el elemento mínimo en cada fila y reste este valor de todos los elementos de la fila.**

**(2) Identifique el elemento mínimo en cada columna y reste este valor de cada elemento de la columna.**

**(3) Haga asignaciones de la siguiente forma:**

**-- Para cada fila, con un único cero disponible, que no haya sido asignado o eliminado, marque el cero como asignado. Para cada cero que sea asignado, cruce con una equis todos los otros ceros en la misma fila y columna.**

**-- Para cada columna, repita el proceso anterior.**

**-- Si en una fila hay más de un cero y no se puede escoger uno por inspección, escoja cualquiera.**

**-- Si en una columna hay más de un cero y no se puede escoger uno por inspección, escoja cualquiera.**

**-- El proceso anterior continua hasta que todos los ceros están asignados o cruzados.**

**(4) La asignación óptima se presenta cuando el número de celdas asignadas es igual al número de filas (y columnas). En caso que se haya escogido un cero de manera arbitraria puede existir una solución óptima alterna. Si no se encuentra una solución óptima continúe con el paso siguiente.**

**(5) Dibuje el mínimo número de líneas verticales y horizontales necesarias para cubrir todos los ceros y realice el siguiente procedimiento (conocido como algoritmo de "ticking"):**

**-- (a) Marque todas las filas que no tienen asignación.**

**-- (b) Si la fila marcada tiene un cero, entonces marque la columna.**

**-- (c) Si la columna marcada tiene una asignación, entonces marque esa fila.**

**-- (d) Repita (b) y (c) estos pasos hasta que no se puedan marcar más filas o columnas.**

**-- (e) Dibuje una línea recta a través de todas las filas NO marcadas y las columnas SI marcadas.**

**-- Este proceso se puede realizar de forma intuitiva sin seguir el proceso.**

**(6) Seleccione el menor valor de todos los elementos fuera de las líneas. Reste este valor de todos los elementos fuera de las líneas y súmelo a los elementos que se encuentran en la intersección de dos líneas. De esta manera se obtiene otra matriz para realizar la asignación.**

**(7) Vuelva al paso (3) y repita el proceso hasta encontrar el valor óptimo.**

**4. El Mecanismo de Asignación.**

**==============================**

**Se mostrará inicialmente como se hace una selección inicial y luego en los ejemplos siguientes, como se realiza el proceso iterativo de ir mejorando una solución.**

**Iteración 0:**

**Tabla inicial.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 5 9 3 6 |**

**| | |**

**| M2 | 8 7 8 2 |**

**| | |**

**| M3 | 6 10 12 7 |**

**| | |**

**| M4 | 3 10 8 6 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 1:**

**Se toma el elemento mínimo de cada fila y se resta de todos los elementos de la fila.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 2 6 0 3 |**

**| | |**

**| M2 | 6 5 6 0 |**

**| | |**

**| M3 | 0 4 6 1 |**

**| | |**

**| M4 | 0 7 5 3 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 2:**

**Se toma el mínimo de cada columna y se resta de todos los elementos de la columna.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 2 2 0 3 |**

**| | |**

**| M2 | 6 1 6 0 |**

**| | |**

**| M3 | 0 0 6 1 |**

**| | |**

**| M4 | 0 3 5 3 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 3:**

**Se muestra una primera asignación sin utilizar el algoritmo de asignación descrito.**

**Con el cual se logran únicamente 3 asignaciones.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 2 2 [0] 3 |**

**| | |**

**| M2 | 6 1 6 [0] |**

**| | |**

**| M3 | [0] >0< 6 1 |**

**| | |**

**| M4 | >0< 3 5 3 |**

**+-------+--------------------------+**

**Al utilizar el algoritmo de asignación, se maximiza el número de asignaciones, esto disminuirá el número de iteraciones que deben realizarse. Para que el algoritmo funcione adecuadamente se debe utilizar este mecanismo. Además en este ejemplo se logra obtener un valor óptimo.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 2 2 [0] 3 |**

**| | |**

**| M2 | 6 1 6 [0] |**

**| | |**

**| M3 | >0< [0] 6 1 |**

**| | |**

**| M4 | [0] 3 5 3 |**

**+-------+--------------------------+**

**5. Un Primer Ejemplo.**

**=====================**

**El siguiente problema de asignación se resolverá utilizando el método húngaro descrito anteriormente.**

**Iteración 0:**

**Tabla inicial.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 20 25 22 28 |**

**| | |**

**| M2 | 15 18 23 17 |**

**| | |**

**| M3 | 19 17 21 24 |**

**| | |**

**| M4 | 25 23 24 24 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 1:**

**Se toma el elemento mínimo de cada fila y se resta de todos los elementos de la fila.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 5 2 8 |**

**| | |**

**| M2 | 0 3 8 2 |**

**| | |**

**| M3 | 2 0 4 7 |**

**| | |**

**| M4 | 2 0 1 1 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 2:**

**Se toma el mínimo de cada columna y se resta de todos los elementos de la columna.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 5 1 7 |**

**| | |**

**| M2 | 0 3 7 1 |**

**| | |**

**| M3 | 2 0 3 6 |**

**| | |**

**| M4 | 2 0 0 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 3:**

**Se realizan las asignaciones.**

**Para cada fila o columna asigne la celda con cero.**

**Para cada cero asignado, ponga una marca en los demás ceros de la misma fila y la misma columna. Se continua el proceso hasta asignar o marcar todos los ceros.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] 5 1 7 |**

**| | |**

**| M2 | >0< 3 7 1 |**

**| | |**

**| M3 | 2 [0] 3 6 |<**

**| | |**

**| M4 | 2 >0< [0] >0< |<**

**+-------+--------------------------+**

**^**

**Iteración 4:**

**La solución no es óptima pues se han asignado 3 máquinas únicamente.**

**Trace el mínimo número de líneas verticales y horizontales para cubrir todos los ceros.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+----:---------------------+**

**| M1 | [0] 5 1 7 |**

**| | : |**

**| M2 | >0< 3 7 1 |**

**| | : |**

**| M3 ......2....[0]....3.....6.....**

**| | : |**

**| M4 ......2....>0<...[0]...>0<....**

**+-------+----:---------------------+**

**Iteración 5:**

**Seleccione el menor de los elementos descubiertos.**

**Reste este valor de los elementos descubiertos.**

**Sume este valor a los que estén en la intersección de las líneas.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 4 0 6 |**

**| | |**

**| M2 | 0 2 6 0 |**

**| | |**

**| M3 | 3 0 3 6 |**

**| | |**

**| M4 | 3 0 0 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 6:**

**Realice de nuevo la asignación de máquinas.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] 4 >0< 6 |**

**| | |**

**| M2 | >0< 2 6 [0] |**

**| | |**

**| M3 | 3 [0] 3 6 |**

**| |**

**| M4 | 3 >0< [0] >0< |**

**+-------+--------------------------+**

**Ahora se tiene una asignación óptima.**

**M1 -> J1**

**M2 -> J4**

**M3 -> J2**

**M4 -> J3**

**Se tiene una asignación óptima cuando ocurre uno de estos casos:**

**() Se han asignado las cuatro máquinas.**

**() El mínimo número de líneas que se puede trazar es de 4, lo que significa que se debe reordenar la asignación.**

**El costo de esta asignación estará dado por los valores de la matriz original:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [20] 25 22 28 |**

**| | |**

**| M2 | 15 18 23 [17] |**

**| | |**

**| M3 | 19 [17] 21 24 |**

**| | |**

**| M4 | 25 23 [24] 24 |**

**+-------+--------------------------+**

**z = 20 + 17 + 17 + 24**

**z = 78 unidades.**

**6. Un Segundo Ejemplo.**

**======================**

**Una compañía que se encarga de revisar, editar y publicar libros tiene 5 impresoras que desea localizar en 5 posibles lugares. Cada impresora tiene diferentes características y velocidades. En cada sitio se debe colocar únicamente 1 impresora. Para este problema se desea encontrar la colocación de menor costo.**

**A continuación se presenta una tabla con el costo por hora de operar cada una de las impresoras así como la capacidad de impresión por hora de cada una de ellas. Si una impresora trabaja una fracción de hora se estimará un costo por la hora entera.**

**------------------------------**

**Impresora Costo Páginas**

**por hora por hora**

**------------------------------**

**M1 5 12**

**M2 6 14**

**M3 3 8**

**M4 4 10**

**M5 4 11**

**------------------------------**

**La tabla siguiente indica las demandas de impresión en cada uno de los 5 lugares donde se piensan instalar las impresoras.**

**------------------------------**

**Localización No de páginas**

**que se deben**

**imprimir**

**------------------------------**

**J1 199**

**J2 175**

**J3 145**

**J4 298**

**J5 178**

**--------------------------------**

**Con los datos anteriores se debe construir una matriz de costo. Se debe indicar el costo de utilizar cualquier impresora en cualquier localización.**

**Por ejemplo el costo de utilizar M1 en J1 estará dado por:**

**199/12 = 16.5833 horas que se convierte en 17 horas.**

**17\*5 = 85 que es el costo de operación.**

**El costo de utilizar M1 en J2 estará dado por:**

**175/12 = 14.5833 horas que se convierte en 15 horas**

**15 \* 5 = 75**

**Iteración 0:**

**Se construye una matriz de costos donde se muestra el costo incurrido en usar cada impresora en cada uno de los diferentes lugares.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 85 75 65 125 75 |**

**| | |**

**| M2 | 90 78 66 132 78 |**

**| | |**

**| M3 | 75 66 57 114 69 |**

**| | |**

**| M4 | 80 72 60 120 72 |**

**| | |**

**| M5 | 76 64 56 112 68 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 1:**

**Se toma el mínimo de cada fila y se resta a los demás elementos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 20 10 0 60 10 |**

**| | |**

**| M2 | 24 12 0 66 12 |**

**| | |**

**| M3 | 18 9 0 57 12 |**

**| | |**

**| M4 | 20 12 0 60 12 |**

**| | |**

**| M5 | 20 8 0 56 12 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 2:**

**Se toma el mínimo de cada columna y se resta a los demás elementos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 2 0 4 0 |**

**| | |**

**| M2 | 6 4 0 10 2 |**

**| | |**

**| M3 | 0 1 0 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | 2 4 0 4 2 |**

**| | |**

**| M5 | 2 0 0 0 2 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 3:**

**Se hacen las asignaciones.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 2 >0< 4 [0] |<**

**| | |**

**| M2 | 6 4 [0] 10 2 |**

**| | |**

**| M3 | [0] 1 >0< 1 2 |<**

**| | |**

**| M4 | 2 4 >0< 4 2 |**

**| | |**

**| M5 | 2 [0] >0< >0< 2 |<**

**+-------+--------------------------------+**

**^**

**Iteración 4:**

**No se tiene una solución óptima.**

**Se hacen las líneas.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+----------------:---------------+**

**| M1 ......2.....2....>0<....4....[0]....**

**| | : |**

**| M2 | 6 4 [0] 10 2 |**

**| | : |**

**| M3 .....[0]....1....>0<....1.....2.....**

**| | : |**

**| M4 | 2 4 >0< 4 2 |**

**| | : |**

**| M5 ......2....[0]...>0<...>0<....2.....**

**+-------+----------------:---------------+**

**Iteración 5:**

**Se asignan los nuevos valores.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 2 2 4 0 |**

**| | |**

**| M2 | 4 2 0 8 0 |**

**| | |**

**| M3 | 0 1 2 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | 0 2 0 2 0 |**

**| | |**

**| M5 | 2 0 2 0 2 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 6:**

**Se hacen las asignaciones.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 2 2 4 [0] |**

**| | |**

**| M2 | 4 2 [0] 8 >0< |**

**| | |**

**| M3 | [0] 1 2 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | >0< 2 >0< 2 >0< |**

**| | |**

**| M5 | 2 [0] 2 >0< 2 |<**

**+-------+--------------------------------+**

**^ ^ ^**

**Iteración 7:**

**No se tiene una solución óptima y se trazan las líneas.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+----:-----------:-----------:---+**

**| M1 | 2 2 2 4 [0] |**

**| | : : : |**

**| M2 | 4 2 [0] 8 >0< |**

**| | : : : |**

**| M3 | [0] 1 2 1 2 |**

**| | : : : |**

**| M4 | >0< 2 >0< 2 >0< |**

**| | : : : |**

**| M5 ......2....[0]....2....>0<....2.....**

**+-------+----:-----------:-----------:---+**

**Iteración 8:**

**Se construye la nueva matriz.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 1 2 3 0 |**

**| | |**

**| M2 | 4 1 0 7 0 |**

**| | |**

**| M3 | 0 0 2 0 2 |**

**| | |**

**| M4 | 0 1 0 1 0 |**

**| | |**

**| M5 | 3 0 3 0 3 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 9:**

**Se realiza la asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 1 2 3 [0] |**

**| | |**

**| M2 | 4 1 [0] 7 >0< |**

**| | |**

**| M3 | >0< [0] 2 >0< 2 |**

**| | |**

**| M4 | [0] 1 >0< 1 >0< |**

**| | |**

**| M5 | 3 >0< 3 [0] 3 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Finalmente se tiene una asignación óptima, para calcular el valor de "z" volvemos a la matriz original.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 85 75 65 125 [75] |**

**| | |**

**| M2 | 90 78 [66] 132 78 |**

**| | |**

**| M3 | 75 [66] 57 114 69 |**

**| | |**

**| M4 | [80] 72 60 120 72 |**

**| | |**

**| M5 | 76 64 56 [112] 68 |**

**+-------+--------------------------------+**

**z = 75 + 66 + 66 + 80 + 112**

**z = 399**

**Observe que se tiene una solución alterna dada, por supuesto con el mismo valor de para "z".**

**Iteración 10:**

**Una solución alterna.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 2 1 2 3 [0] |**

**| | |**

**| M2 | 4 1 [0] 7 >0< |**

**| | |**

**| M3 | >0< >0< 2 [0] 2 |**

**| | |**

**| M4 | [0] 1 >0< 1 >0< |**

**| | |**

**| M5 | 3 [0] 3 >0< 3 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Al volver a la matriz original se obtiene:**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 85 75 65 125 [75] |**

**| | |**

**| M2 | 90 78 [66] 132 78 |**

**| | |**

**| M3 | 75 66 57 [114] 69 |**

**| | |**

**| M4 | [80] 72 60 120 72 |**

**| | |**

**| M5 | 76 [64] 56 112 68 |**

**+-------+--------------------------------+**

**z = 75 + 66 + 114 + 80 + 64**

**z = 399**

**7. Múltiples Soluciones Óptimas.**

**================================**

**En algunas ocasiones se pueden escoger los ceros en las matrices en más de una forma. Si se puede escoger más de una celda con ceros, entonces existirán múltiples soluciones para el problema. Todas las soluciones tendrán el mismo costo de asignación. En estos casos es importante conocer las diferentes asignaciones para escoger la que presente mayores ventajas dependiendo de los requerimientos de la empresa.**

**A continuación se muestra un ejemplo donde se presentan múltiples soluciones.**

**Iteración 0:**

**Se tiene la siguiente matriz de costos.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 1 8 15 22 |**

**| | |**

**| M2 | 13 18 23 28 |**

**| | |**

**| M3 | 13 18 23 28 |**

**| | |**

**| M4 | 19 23 27 31 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 1:**

**Se resta el mínimo de cada fila.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 7 14 21 |**

**| | |**

**| M2 | 0 5 10 15 |**

**| | |**

**| M3 | 0 5 10 15 |**

**| | |**

**| M4 | 0 4 8 12 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 2:**

**Se resta el mínimo de cada columna.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 3 6 9 |**

**| | |**

**| M2 | 0 1 2 3 |**

**| | |**

**| M3 | 0 1 2 3 |**

**| | |**

**| M4 | 0 0 0 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 3:**

**Se realiza la asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] 3 6 9 |**

**| | |**

**| M2 | >0< 1 2 3 |**

**| | |**

**| M3 | >0< 1 2 3 |**

**| | |**

**| M4 | >0< [0] >0< >0< |<**

**+-------+--------------------------+**

**^**

**Iteración 4:**

**Se trazan las líneas.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+----:---------------------+**

**| M1 | [0] 3 6 9 |**

**| | : |**

**| M2 | >0< 1 2 3 |**

**| | : |**

**| M3 | >0< 1 2 3 |**

**| | : |**

**| M4 .....>0<...[0]...>0<...>0<....**

**+-------+----:---------------------+**

**Iteración 5:**

**Se escoge el menor y se resta al área.**

**Se suma el menor a las intersecciones.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 2 5 8 |**

**| | |**

**| M2 | 0 0 1 2 |**

**| | |**

**| M3 | 0 0 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | 1 0 0 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 6:.**

**Se hace la nueva asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] 2 5 8 |**

**| | |**

**| M2 | >0< [0] 1 2 |**

**| | |**

**| M3 | >0< >0< 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | 1 >0< [0] >0< |<**

**+-------+--------------------------+**

**^ ^**

**Iteración 7:**

**Se hace el trazado de líneas.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+----:-----:---------------+**

**| M1 | [0] 2 5 8 |**

**| | : : |**

**| M2 | >0< [0] 1 2 |**

**| | : : |**

**| M3 | >0< >0< 1 2 |**

**| | : : |**

**| M4 ......1....>0<...[0]...>0<....**

**+-------+----:-----:---------------+**

**Iteración 8:**

**Se resta el menor al área y**

**se suma en las intersecciones.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 2 4 7 |**

**| | |**

**| M2 | 0 0 0 1 |**

**| | |**

**| M3 | 0 0 0 1 |**

**| | |**

**| M4 | 2 1 0 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 9:**

**Se calcula la nueva asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] 2 4 7 |**

**| | |**

**| M2 | >0< [0] >0< 1 |**

**| | |**

**| M3 | >0< >0< [0] 1 |**

**| | |**

**| M4 | 2 1 >0< [0] |**

**+-------+--------------------------+**

**La primera solución brindada es:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [ 1] 8 15 22 |**

**| | |**

**| M2 | 13 [18] 23 28 |**

**| | |**

**| M3 | 13 18 [23] 28 |**

**| | |**

**| M4 | 19 23 27 [31] |**

**+-------+--------------------------+**

**z = 1 + 18 + 23 + 31**

**z = 73**

**Iteración 10:**

**Otra forma de hacer la asignación:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] 2 4 7 |**

**| | |**

**| M2 | >0< >0< [0] 1 |**

**| | |**

**| M3 | >0< [0] >0< 1 |**

**| | |**

**| M4 | 2 1 >0< [0] |**

**+-------+--------------------------+**

**La segunda solución es:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [ 1] 8 15 22 |**

**| | |**

**| M2 | 13 18 [23] 28 |**

**| | |**

**| M3 | 13 [18] 23 28 |**

**| | |**

**| M4 | 19 23 27 [31] |**

**+-------+--------------------------+**

**z = 1 + 23 + 18 + 31**

**z = 73**

**8. Problemas con la Solución Final.**

**===================================**

**En algunas ocasiones se presentan problemas con la asignación final. A pesar que el problema se encuentra en su valor óptimo, la asignación de los ceros puede producir asignaciones inválidas.**

**Iteración 0:**

**Se tiene la siguiente matriz de costos.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 3 1 1 4 |**

**| | |**

**| M2 | 4 2 2 5 |**

**| | |**

**| M3 | 5 3 4 8 |**

**| | |**

**| M4 | 4 2 5 9 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 1:**

**Se resta el mínimo de cada fila.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 2 0 0 3 |**

**| | |**

**| M2 | 2 0 0 3 |**

**| | |**

**| M3 | 2 0 1 5 |**

**| | |**

**| M4 | 2 0 3 7 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 2:**

**Se resta el mínimo de cada columna.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 0 0 0 0 |**

**| | |**

**| M2 | 0 0 0 0 |**

**| | |**

**| M3 | 0 0 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | 0 0 3 4 |**

**+-------+--------------------------+**

**Iteración 3:**

**Se realiza una primera asignación.**

**Observe que en este caso solamente se asignan 3 máquinas.**

**Sin embargo es evidente que existe una asignación óptima.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [0] >0< >0< >0< |**

**| | |**

**| M2 | >0< >0< [0] >0< |**

**| | |**

**| M3 | >0< [0] 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | >0< >0< 3 4 |**

**+-------+--------------------------+**

**^ ^ ^ ^**

**Iteración 4:**

**Se trazan las líneas y solamente se deben trazar 4 líneas.**

**Esto implica que existe una forma de asignar 4 máquinas.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+----:-----:-----:-----:---+**

**| M1 | [0] >0< >0< >0< |**

**| | : : : : |**

**| M2 | >0< >0< [0] >0< |**

**| | : : : : |**

**| M3 | >0< [0] 1 2 |**

**| | : : : : |**

**| M4 | >0< >0< 3 4 |**

**+-------+----:-----:-----:-----:---+**

**Iteración 5.**

**Otra posible solución óptima.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | >0< >0< [0] >0< |**

**| | |**

**| M2 | >0< >0< >0< [0] |**

**| | |**

**| M3 | [0] >0< 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | >0< [0] 3 4 |**

**+-------+--------------------------+**

**En este caso se tiene:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 3 1 [1] 4 |**

**| | |**

**| M2 | 4 2 2 [5] |**

**| | |**

**| M3 | [5] 3 4 8 |**

**| | |**

**| M4 | 4 [2] 5 9 |**

**+-------+--------------------------+**

**z = 1 + 5 + 5 + 2**

**z = 13**

**Iteración 5':**

**Aquí se muestra una asignación óptima alternativa.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | >0< >0< >0< [0] |**

**| | |**

**| M2 | >0< >0< [0] >0< |**

**| | |**

**| M3 | >0< [0] 1 2 |**

**| | |**

**| M4 | [0] >0< 3 4 |**

**+-------+--------------------------+**

**En este caso se tiene:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 3 1 1 [4] |**

**| | |**

**| M2 | 4 2 [2] 5 |**

**| | |**

**| M3 | 5 [3] 4 8 |**

**| | |**

**| M4 | [4] 2 5 9 |**

**+-------+--------------------------+**

**z = 4 + 2 + 3 + 4**

**z = 13**

**9. Desbalance.**

**==============**

**En las secciones anteriores se ha supuesto que el número de máquinas y el número de localizaciones son iguales. En algunos problemas puede ser que no se presente esta situación, cuando el número de máquinas no es igual al número de localizaciones se tiene un problema de desbalance. Para resolver este problema se deben agregar filas o columnas ficticias para balancear la tabla. Posteriormente se procede a utilizar el algoritmo descrito anteriormente.**

**Por ejemplo si se tiene el problema:**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 20 25 22 28 |**

**| | |**

**| M2 | 15 18 23 17 |**

**| | |**

**| M3 | 19 17 21 24 |**

**+-------+--------------------------+**

**Se debe agregar una fila ficticia para balancear el problema.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 20 25 22 28 |**

**| | |**

**| M2 | 15 18 23 17 |**

**| | |**

**| M3 | 19 17 21 24 |**

**| | |**

**| M4\* | 0 0 0 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**Al resolver el problema se encuentra la siguiente solución con un valor:**

**z = 54**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | [20] 25 22 28 |**

**| | |**

**| M2 | 15 18 23 [17] |**

**| | |**

**| M3 | 19 [17] 21 24 |**

**| | |**

**| M4\* | 0 0 [0] 0 |**

**+-------+--------------------------+**

**10. Maximización.**

**=================**

**Pueden existir problemas donde en lugar de minimizar los costos de instalación se desea maximizar las ganancias producidas. Cuando se trabaja con un problema de maximización se convertirá en un problema de minimización y se utilizará el método descrito. El problema de minimizar producirá los mismos resultados, en términos de asignaciones, que al maximizar.**

**Se debe encontrar el valor máximo de la tabla. Este valor se debe restar a todos los elementos de la tabla lo que produce el siguiente problema de minimización.**

**Por ejemplo, si se desean maximizar las ganancias del siguiente problema de asignación:**

**Iteración 0:**

**Matriz original de maximización.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 30 37 40 28 40 |**

**| | |**

**| M2 | 40 24 27 21 36 |**

**| | |**

**| M3 | 40 32 33 30 35 |**

**| | |**

**| M4 | 25 38 40 36 36 |**

**| | |**

**| M5 | 29 62 41 34 39 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 1:**

**Matriz convertida a minimización.**

**Al restar el valor de 62 a todos los elementos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 32 25 22 34 22 |**

**| | |**

**| M2 | 22 38 35 41 26 |**

**| | |**

**| M3 | 22 30 29 32 27 |**

**| | |**

**| M4 | 37 24 22 26 26 |**

**| | |**

**| M5 | 33 0 21 28 23 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 2.**

**Solución con minimización.**

**Al resolver este problema se encuentra la siguiente solución.**

**Con un valor de z = 96.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 32 25 [22] 34 22 |**

**| | |**

**| M2 | 22 38 35 41 [26] |**

**| | |**

**| M3 | [22] 30 29 32 27 |**

**| | |**

**| M4 | 37 24 22 [26] 26 |**

**| | |**

**| M5 | 33 [0] 21 28 23 |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 3.**

**Solución con maximización.**

**Aquí se muestra la solución con los valores originales de la matriz.**

**z = 214 al maximizar y volver a los valores originales.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 30 37 [40] 28 40 |**

**| | |**

**| M2 | 40 24 27 21 [36] |**

**| | |**

**| M3 | [40] 32 33 30 35 |**

**| | |**

**| M4 | 25 38 40 [36] 36 |**

**| | |**

**| M5 | 29 [62] 41 34 39 |**

**+-------+--------------------------------+**

**z = 40 + 36 + 40 + 36 + 62**

**z = 214**

**11. El Vendedor Viajero.**

**========================**

**Este es un problema clásico de computación. Un vendedor debe visitar "n" ciudades. Desea visitar cada ciudad una sola vez y volver a la ciudad donde inició. La distancia entre la ciudad "i" y la ciudad "j" denota por el costo "cij". Desea hacer el recorrido de forma que tenga que viajar la mínima distancia posible.**

**Si existen n ciudades habrá (n-1)! formas de diseñar el viaje. Por ejemplo si se tienen 5 ciudades se tendrán 4! posibles caminos. Este tipo de problemas se puede resolver con el algoritmo de asignación presentado anteriormente.**

**El valor de xij se interpretará como:**

**\_**

**| 1 si viaja de la ciudad "i" a la "j"**

**xij = |**

**|\_0 de otra forma**

**Se resolverá el problema utilizando una técnica de ramificación y acotamiento, denominada "branch and bound".**

**Cuando se realizan las ramificaciones se va construyendo un árbol de soluciones. Para escoger cuál de los nodos se debe resolver se pueden utilizar las técnicas de "profundidad primero", "anchura primero" o una heurística. En general los problemas de "branch and bound" constan de tres partes:**

**() Selección del nodo.**

**Para los problemas de minimización se realizará la ramificación del programa que tenga el menor valor de z. Para problemas de maximización se realizará la ramificación del programa que tenga el mayor valor de z.**

**() "Branching" o Ramificación.**

**Suelen utilizarse varias técnicas. Se ramificará con base en las subrutas parciales del vendedor viajero agregando un valor de M para romper estas rutas parciales.**

**() "Bounding" o Acotamiento.**

**Se termina el árbol cuando se llega a un nodo infactible, a un nodo factible lo que significa que tiene un camino completo del vendedor viajero. En ese momento el valor de "z" se convierte en un cota inferior para los demás nodos, la cual servirá como mecanismo de acotamiento.**

**Ejemplo**

**--------**

**Suponga que se tiene la siguiente tabla con las distancias de viajar de una ciudad a otra. Se agrega un valor muy alto para viajar de la ciudad "i" a "i" de forma que el vendedor se vea obligado a cambiar de ciudad.**

**Iteración 0:**

**Se tiene la matriz de costos inicial.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 5 8 4 5 |**

**| | |**

**| C2 | 5 M 7 4 5 |**

**| | |**

**| C3 | 8 7 M 8 6 |**

**| | |**

**| C4 | 4 4 8 M 8 |**

**| | |**

**| C5 | 5 5 6 8 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Iteración 1:**

**Al Resolver el problema se obtiene la solución:**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 2 [0] 0 |**

**| | |**

**| C2 | [0] M 1 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 2 1 M 3 [0] |**

**| | |**

**| C4 | 0 [0] 3 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 [0] 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**La solución anterior es una solución a la asignación, pero no del problema del vendedor. Esto debido a que indica la siguiente ruta:**

**C1->C4->C2->C1 y aparte C3->C5->C3**

**con un valor de z=25**

**Para construir una solución al problema del vendedor viajero se debe "romper" la ruta más pequeña. Para eso se toma la tabla anterior y se generan dos nuevos subproblemas.**

**El subproblema 1.1 con un valor de "M" de C3->C5.**

**El subproblema 1.2 con un valor de "M" de C5->C3.**

**Reoptimizando desde el final**

**----------------------------**

**Para reoptimizar desde el final se toma la última tabla producida y se pone un valor de M en la casilla correspondiente, luego se vuelve a aplicar el algoritmo de asignación desde el inicio.**

**Subproblema 1.1.**

**Con un valor de M de C3->C5**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 2 0 0 |**

**| | |**

**| C2 | 0 M 1 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 2 1 M 3 -->M |**

**| | |**

**| C4 | 0 0 3 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 0 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Solución del subproblema 1.1.**

**Con un valor de M de C3->C5**

**Se resta el menor de cada fila.**

**Se resta el menor de cada columna.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 2 0 0 |**

**| | |**

**| C2 | 0 M 1 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 1 0 M 2 M |**

**| | |**

**| C4 | 0 0 3 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 0 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Solución del subproblema 1.1.**

**Con un valor de M de C3->C5**

**Se realiza la asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 2 0 [0] |**

**| | |**

**| C2 | 0 M 1 [0] 0 |**

**| | |**

**| C3 | 1 [0] M 2 M |**

**| | |**

**| C4 | [0] 0 3 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 [0] 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**La solución está dada por:**

**C1->C5->C3->C2->C4->C1**

**Que es una ruta válida con z = 26**

**El valor de z=26 constituirá una cota superior. Cualquier desarrollo con un valor mayor que 26 será descartado o cortado del árbol de búsqueda.**

**Subproblema 1.2.**

**Con un valor de M de C5->C3**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 2 0 0 |**

**| | |**

**| C2 | 0 M 1 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 2 1 M 3 0 |**

**| | |**

**| C4 | 0 0 3 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 -->M 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Solución del Subproblema 1.2.**

**Con un valor de M de C5->C3**

**Se resta el menor de cada fila.**

**Se resta el menor de cada columna.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 1 0 0 |**

**| | |**

**| C2 | 0 M 0 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 2 1 M 3 0 |**

**| | |**

**| C4 | 0 0 2 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 M 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Solución del Subproblema 1.2.**

**Con un valor de M de C5->C3.**

**Se realiza la asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 1 [0] 0 |**

**| | |**

**| C2 | 0 M [0] 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 2 1 M 3 [0] |**

**| | |**

**| C4 | 0 [0] 2 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | [0] 0 M 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**La solución está dada por:**

**C1->C4->C2->C3->C5->->C1**

**Que es una ruta válida con z = 26**

**Que es el recorrido invertido anterior.**

**Reoptimizando desde el inicio**

**-----------------------------**

**Usualmente cuando se utiliza algún tipo de programa para resolver el problema de asignación resulta más sencillo modificar la tabla inicial y no la tabla final. De esta forma el problema se resolvería de la siguiente manera.**

**Subproblema 1.1.**

**Se modifica la tabla inicial.**

**Con un valor de M de C3->C5**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 5 8 4 5 |**

**| | |**

**| C2 | 5 M 7 4 5 |**

**| | |**

**| C3 | 8 7 M 8 -->M |**

**| | |**

**| C4 | 4 4 8 M 8 |**

**| | |**

**| C5 | 5 5 6 8 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Solución del subproblema 1.1.**

**Con un valor de M de C3->C5**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 2 0 [0] |**

**| | |**

**| C2 | 0 M 1 [0] 0 |**

**| | |**

**| C3 | 1 [0] M 2 M |**

**| | |**

**| C4 | [0] 0 3 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 0 0 [0] 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**La solución está dada por:**

**C1->C5->C3->C2->C4->C1**

**Que es una ruta válida con z = 26**

**Nuevamente el valor de z=26 constituirá una cota superior. Cualquier desarrollo con un valor mayor que 26 será descartado o cortado del árbol de búsqueda.**

**Subproblema 1.2.**

**Se modifica la tabla inicial.**

**Con un valor de M de C5->C3**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 5 8 4 5 |**

**| | |**

**| C2 | 5 M 7 4 5 |**

**| | |**

**| C3 | 8 7 M 8 6 |**

**| | |**

**| C4 | 4 4 8 M 8 |**

**| | |**

**| C5 | 5 5 -->M 8 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**Solución del Subproblema 1.2.**

**Con un valor de M de C5->C3**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 0 1 [0] 0 |**

**| | |**

**| C2 | 0 M [0] 0 0 |**

**| | |**

**| C3 | 2 1 M 3 [0] |**

**| | |**

**| C4 | 0 [0] 2 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | [0] 0 M 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**La solución está dada por:**

**C1->C4->C2->C3->C5->->C1**

**Que es una ruta válida con z = 26**

**Que es el recorrido invertido anterior.**

**Gráfico de las Soluciones.**

**--------------------------**

**Finalmente se presenta un árbol con las soluciones encontradas y los problemas que se han producido:**

**P.1**

**z=25**

**1-4-2-1**

**\_3-5-3\_**

**/ \**

**M 3-5 / \ M 5-3**

**/ \**

**/ \**

**P.11 P.12**

**z=26 z=26**

**1-5-3-2-4-1 1-4-2-3-5-1**

**12. Un Ejemplo de Mayor Profundidad.**

**====================================**

**A continuación se presenta un ejemplo más extenso del vendedor viajero, en este caso será necesario quitar más de un camino.**

**Iteración 0:**

**Matriz de costos.**

**+-------+-------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+-------------------------------+**

**| C1 | M 132 217 164 58 |**

**| | |**

**| C2 | 132 M 290 201 79 |**

**| | |**

**| C3 | 217 290 M 113 303 |**

**| | |**

**| C4 | 164 201 113 M 196 |**

**| | |**

**| C5 | 58 79 303 196 M |**

**+-------+-------------------------------+**

**Al resolver este problema se obtiene el árbol de ramificación y acotamiento que se presenta a continuación. Observe el efecto que se produce en el árbol por ser un problema simétrico.**

**P.1**

**z=495**

**1-2-5-1**

**\_\_\_\_\_\_3-4-3\_\_\_\_\_\_\_\_**

**/ \**

**M 3-4 / \ M 4-3**

**/ \**

**/ \**

**/ \**

**P.11 P.12**

**z=652 z=652**

**1-4-3-1 1-3-4-1**

**2-5-2 2-5-2**

**/ \ / \**

**M 2-5 / \ M 5-2 M 2-5 / \ M 5-2**

**/ \ / \**

**/ \ / \**

**P.111 P.112 P.121 P.122**

**z=668 z=704 z=704 z=668**

**1-5-2-4-3-1 1-4-3-2-5-1 1-5-2-3-4-1 1-3-4-2-5-1**

**13. Un Ejemplo No Simétrico.**

**============================**

**Se va a resolver el problema anterior, pero se romperá la simetría del modelo. De esta forma viajar de C1 a C2 cuesta 132 unidades y viajar de C2 a C1 cuesta 232 unidades.**

**Iteración 0:**

**Matriz de costos.**

**+-------+-------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+-------------------------------+**

**| C1 | M 132 217 164 58 |**

**| | |**

**| C2 | 232 M 290 201 79 |**

**| | |**

**| C3 | 317 390 M 113 303 |**

**| | |**

**| C4 | 264 301 213 M 196 |**

**| | |**

**| C5 | 158 179 403 296 M |**

**+-------+-------------------------------+**

**Al resolver este problema se obtiene el árbol de ramificación y acotamiento que se presenta a continuación.**

**P.1**

**z=695**

**1-2-5-1**

**\_\_\_\_\_\_3-4-3\_\_\_\_\_\_\_\_**

**/ \**

**M 3-4 / \ M 4-3**

**/ \**

**/ \**

**/ \**

**P.11 P.12**

**z=952 z=852**

**1-4-3-1 1-3-4-1**

**2-5-2 2-5-2**

**\*\*Acotado\*\* / \**

**M 2-5 / \ M 5-2**

**/ \**

**/ \**

**P.121 P.122**

**z=889 z=868**

**1-2-3-4-5-1 1-3-4-2-5-1**

**El arbol completo se presenta a continuación para evidenciar el acotamiento.**

**P.1**

**z=695**

**1-2-5-1**

**\_\_\_\_\_\_3-4-3\_\_\_\_\_\_\_\_**

**/ \**

**M 3-4 / \ M 4-3**

**/ \**

**/ \**

**/ \**

**P.11 P.12**

**z=952 z=852**

**1-4-3-1 1-3-4-1**

**2-5-2 2-5-2**

**/ \ / \**

**M 2-5 / \ M 5-2 M 2-5 / \ M 5-2**

**/ \ / \**

**/ \ / \**

**P.111 P.112 P.121 P.122**

**z=968 z=1004 z=889 z=868**

**1-5-2-4-3-1 1-4-3-2-5-1 1-2-3-4-5-1 1-3-4-2-5-1**

**14. Un Ejemplo No Simétrico Inverso.**

**====================================**

**En el siguiente ejemplo se han intercambiado la triangular superior de la tabla con la triangular inferior.**

**Iteración 0:**

**Matriz de costos.**

**+-------+-------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+-------------------------------+**

**| C1 | M 232 317 264 158 |**

**| | |**

**| C2 | 132 M 390 301 179 |**

**| | |**

**| C3 | 217 290 M 213 403 |**

**| | |**

**| C4 | 164 201 113 M 296 |**

**| | |**

**| C5 | 58 79 303 196 M |**

**+-------+-------------------------------+**

**Al resolver este modelo se obtiene el siguiente árbol de resultados. Observe que no se desarrollará el problema P.120 puesto que su valor de z es mayor que el mejor resultado obtenido en el lado izquierdo del árbol.**

**P.1**

**z=695**

**1-5-2-1**

**\_\_\_\_\_\_3-4-3\_\_\_\_\_\_\_\_**

**/ \**

**M 3-4 / \ M 4-3**

**/ \**

**/ \**

**P.1.1 P.1.2**

**z=852 z=952**

**1-4-3-1 1-3-4-1**

**2-5-2 2-5-2**

**/ \ \*\*Acotado\*\***

**M 2-5 / \ M 5-2**

**/ \**

**/ \**

**P.1.1.1 P.1.1.2**

**z=868 z=889**

**1-5-2-4-3-1 1-5-4-3-2-1**

**15. Resumen.**

**============**

**Se ha discutido un tipo especial de problema de transporte donde se busca asignar "n" máquinas en "n" localizaciones. A pesar que se puede programar como un problema de programación lineal, se presentado un algoritmo específico denominado el método húngaro.**

**Si el número de máquinas y de localizaciones son iguales se dice que el problema está balanceado. Si el número de máquinas difiere del número de localizaciones se dice que el problema presenta un desbalance.**

**Existen algunos problemas específicos que requieren de maximización en lugar de minimización. Se han mostrado las modificaciones que se deben realizar para resolver esos problemas.**

**Un problema típico de computación es el problema del "vendedor viajero", se ha mostrado como modificar el método húngaro para resolver este problema.**

**+++**

**16. Ejercicios.**

**===============**

**() Ejercicio 1.**

**Explique la diferencia entre el problema de transporte y el problema de asignación.**

**() Ejercicio 2.**

**Describa el algoritmo húngaro para solucionar el problema de asignación.**

**() Ejercicio 3.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 41 32 39 52 |**

**| | |**

**| M2 | 22 29 49 65 |**

**| | |**

**| M3 | 27 39 60 51 |**

**| | |**

**| M4 | 45 50 48 52 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 4.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 10 5 9 18 11 |**

**| | |**

**| M2 | 13 19 6 12 14 |**

**| | |**

**| M3 | 3 2 4 4 5 |**

**| | |**

**| M4 | 18 9 12 17 15 |**

**| | |**

**| M5 | 11 6 14 19 10 |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 5.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 8 26 17 11 |**

**| | |**

**| M2 | 13 28 4 26 |**

**| | |**

**| M3 | 38 19 18 15 |**

**| | |**

**| M4 | 19 26 24 10 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 6.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 48 48 50 44 |**

**| | |**

**| M2 | 56 60 60 68 |**

**| | |**

**| M3 | 96 94 90 85 |**

**| | |**

**| M4 | 42 44 54 46 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 7.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 8 26 17 11 |**

**| | |**

**| M2 | 13 28 4 26 |**

**| | |**

**| M3 | 38 19 18 15 |**

**| | |**

**| M4 | 19 26 24 10 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 8.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 11 17 8 16 20 |**

**| | |**

**| M2 | 9 7 12 6 15 |**

**| | |**

**| M3 | 13 16 15 12 16 |**

**| | |**

**| M4 | 21 24 17 28 26 |**

**| | |**

**| M5 | 14 10 12 11 15 |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 9.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 1 3 2 3 6 |**

**| | |**

**| M2 | 2 4 3 1 5 |**

**| | |**

**| M3 | 5 6 3 4 6 |**

**| | |**

**| M4 | 3 1 4 2 2 |**

**| | |**

**| M5 | 1 5 6 5 4 |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 10.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 12 30 21 15 |**

**| | |**

**| M2 | 18 33 9 31 |**

**| | |**

**| M3 | 44 25 24 21 |**

**| | |**

**| M4 | 23 30 28 14 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 11.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 2 3 4 5 |**

**| | |**

**| M2 | 4 5 6 7 |**

**| | |**

**| M3 | 7 8 9 8 |**

**| | |**

**| M4 | 3 5 8 4 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 12.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| M1 | 12 8 7 15 4 |**

**| | |**

**| M2 | 7 9 1 14 10 |**

**| | |**

**| M3 | 9 6 12 6 7 |**

**| | |**

**| M4 | 7 6 14 6 10 |**

**| | |**

**| M5 | 9 6 10 10 6 |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 13.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 J5 J6 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------------+**

**| M1 | 41 72 39 52 25 51 |**

**| | |**

**| M2 | 22 29 49 65 81 50 |**

**| | |**

**| M3 | 27 39 60 51 32 32 |**

**| | |**

**| M4 | 45 50 48 52 65 43 |**

**| | |**

**| M5 | 29 40 39 26 30 33 |**

**| | |**

**| M6 | 82 40 40 60 51 30 |**

**+-------+--------------------------------------+**

**() Ejercicio 14.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 16 22 24 20 |**

**| | |**

**| M2 | 10 32 26 16 |**

**| | |**

**| M3 | 10 20 46 30 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 15.**

**Resuelva el siguiente problema de asignación.**

**En este caso se desea maximizar la asignación.**

**+-------+--------------------------+**

**| | J1 J2 J3 J4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| M1 | 42 35 28 21 |**

**| | |**

**| M2 | 30 25 20 15 |**

**| | |**

**| M3 | 30 25 20 15 |**

**| | |**

**| M4 | 24 20 16 12 |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 16.**

**A continuación se presenta un problema del vendedor viajero. Para ello se presentan los siguientes costos para viajar de una ciudad a otra. Se desean visitar todas las ciudades sin pasar por ninguna dos veces y regresando a la primera ciudad visitada, indique la ruta que se debe seguir si se deben minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------+**

**| C1 | M 13 10 9 |**

**| | |**

**| C2 | 13 M 6 24 |**

**| | |**

**| C3 | 10 6 M 8 |**

**| | |**

**| C4 | 9 24 8 M |**

**+-------+--------------------------+**

**() Ejercicio 17.**

**Resuelva el siguiente problema del vendedor viajero, indique la ruta que se debe seguir si se desean minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 30 45 65 80 |**

**| | |**

**| C2 | 30 M 25 50 50 |**

**| | |**

**| C3 | 45 25 M 40 40 |**

**| | |**

**| C4 | 65 50 40 M 35 |**

**| | |**

**| C5 | 80 50 40 35 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 18.**

**Resuelva el siguiente problema del vendedor viajero, indique la ruta que se debe seguir si se desean minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 12 18 20 14 |**

**| | |**

**| C2 | 11 M 15 11 20 |**

**| | |**

**| C3 | 24 20 M 32 30 |**

**| | |**

**| C4 | 16 18 16 M 24 |**

**| | |**

**| C5 | 15 17 19 18 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 19.**

**Resuelva el siguiente problema del vendedor viajero, indique la ruta que se debe seguir si se desean minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 10 6 8 7 |**

**| | |**

**| C2 | 10 M 5 20 15 |**

**| | |**

**| C3 | 6 5 M 14 7 |**

**| | |**

**| C4 | 8 20 14 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 7 15 7 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 20.**

**Resuelva el siguiente problema del vendedor viajero, indique la ruta que se debe seguir si se desean minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------+**

**| C1 | M 10 6 8 7 |**

**| | |**

**| C2 | 110 M 5 20 15 |**

**| | |**

**| C3 | 106 105 M 14 7 |**

**| | |**

**| C4 | 108 120 114 M 4 |**

**| | |**

**| C5 | 107 115 107 4 M |**

**+-------+--------------------------------+**

**() Ejercicio 21. \*/\*\*\***

**Parece una ruptura de la simetría debido a las soluciones alternas.**

**Resuelva el siguiente problema del vendedor viajero, indique la ruta que se debe seguir si se desean minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 C6 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------------+**

**| C1 | M 10 8 9 7 6 |**

**| | |**

**| C2 | 10 M 10 5 6 4 |**

**| | |**

**| C3 | 8 10 M 8 9 7 |**

**| | |**

**| C4 | 9 5 8 M 6 5 |**

**| | |**

**| C5 | 7 6 9 6 M 1 |**

**| | |**

**| C6 | 6 4 7 5 1 M |**

**+-------+--------------------------------------+**

**() Ejercicio 22. \*\*\***

**Arbol de busqueda no binario.**

**Resuelva el siguiente problema del vendedor viajero, indique la ruta que se debe seguir si se desean minimizar los costos.**

**+-------+--------------------------------------+**

**| | C1 C2 C3 C4 C5 C6 |**

**| | |**

**+-------+--------------------------------------+**

**| C1 | M 10 20 9 7 6 |**

**| | |**

**| C2 | 10 M 10 5 6 4 |**

**| | |**

**| C3 | 20 10 M 8 9 7 |**

**| | |**

**| C4 | 9 5 8 M 6 5 |**

**| | |**

**| C5 | 7 6 9 6 M 1 |**

**| | |**

**| C6 | 6 4 7 5 1 M |**

**+-------+--------------------------------------+**